Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 15.09.2014.

Inžinjerska matematika III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Prilikom pisanja rješenja zadataka obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y &= e^t \\ \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} &= e^{-t} \end{aligned}$$

2. Data je Laplace-ova transformacija funkcije y sa

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{4s^2 - 6s + 15}{s^3 - 2s^2 + 5s}.$$

Odrediti šta je y?

3. Date su dvije skupine proizvoda. Jedna od njih sadrži 12, a druga 10 komada, pri čemu se u obje skupine nalazi po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve skupine i prebačen je u drugu, a poslije toga slučajnim odabirom uzima se jedan proizvod iz druge skupine. Odrediti vjerovatnoću da je taj proizvod neispravan.

4. Na putu kretanja automobila nalazi se 5 semafora. Vjerovatnoća da će se auto zaustaviti na prvom semaforu je 0,4; na drugom 0,6; na trećem 0,5; na četvrtom 0,7 i na petom semaforu 0,4. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Neka je X slučajna promjenjiva koja predstavlje broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenjive X, a zatim odrediti njenu funkciju raspodjele $F(x)$, matematičko očekivanje $E(x)$ i disperziju $\sigma^2(X)$.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Rješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x}+\dot{x}+x+\ddot{y}+y=e^{t}$$
$$\ddot{x}+\dot{x}+\ddot{y}=e^{-t}$$

Rj: Sistem ćemo rješiti metodom svođenja sistema na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda.

Napišimo sistem u operator oznakama $(D=\frac{d}{dt})$

$$(D^2+D+1)[x]+(D^2+1)[y]=e^{t}$$
$$-\quad (D^2+D)[x]+D^2y=e^{-t}$$

$$x+y=e^{t}-e^{-t}$$

$$y=-x+e^{t}-e^{-t} \quad \ldots(1) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}=-\dot{x}+e^{t}+e^{-t}$$
$$\ddot{y}=-\ddot{x}+e^{t}-e^{-t} \quad \ldots(2)$$

Ako (1) i (2) uvrstimo u prvu jednačinu sistema imamo

$$\ddot{x}+\dot{x}+x+(-\ddot{x}+e^{t}-e^{-t})+(-x+e^{t}-e^{-t})=e^{t}$$
$$\dot{x}+2e^{t}-2e^{-t}=e^{t}$$
$$\dot{x}=-e^{t}+2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x(t)=-e^{t}-2e^{-t}+C_1$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad y(t)=2e^{t}+e^{-t}-C_1$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t)=-e^{t}-2e^{-t}+C_1 \\ y(t)=2e^{t}+e^{-t}-C_1 \end{cases}$$

(#) Data je Laplace-ova transformacija f-je y sa

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s}.$$

Odrediti šta je y?

R:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s}\right\}$$

$$\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s} = \frac{4s^2-6s+15}{\underbrace{s(s^2-2s+5)}_{\text{ne može se dalje faktorisati}}} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+5} \quad / \cdot s^3-2s^2+5s$$

$$A(s^2-2s+5) + Bs^2 + Cs = 4s^2-6s+15$$

$$(A+B)s^2 + (-2A+C)s + 5A = 4s^2-6s+15 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A+B \quad &= 4 \\ -2A \quad +C &= -6 \\ 5A \quad &= 15 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A=3,\ B=1,\ C=0.$

Time smo dobili da je

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{3}{s} + \frac{s}{s^2-2s+5} = \frac{3}{s} + \frac{s-1+1}{(s-1)^2+4}$$

$$= \frac{3}{s} + \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

Iz tablica Laplasovih transformacija znamo

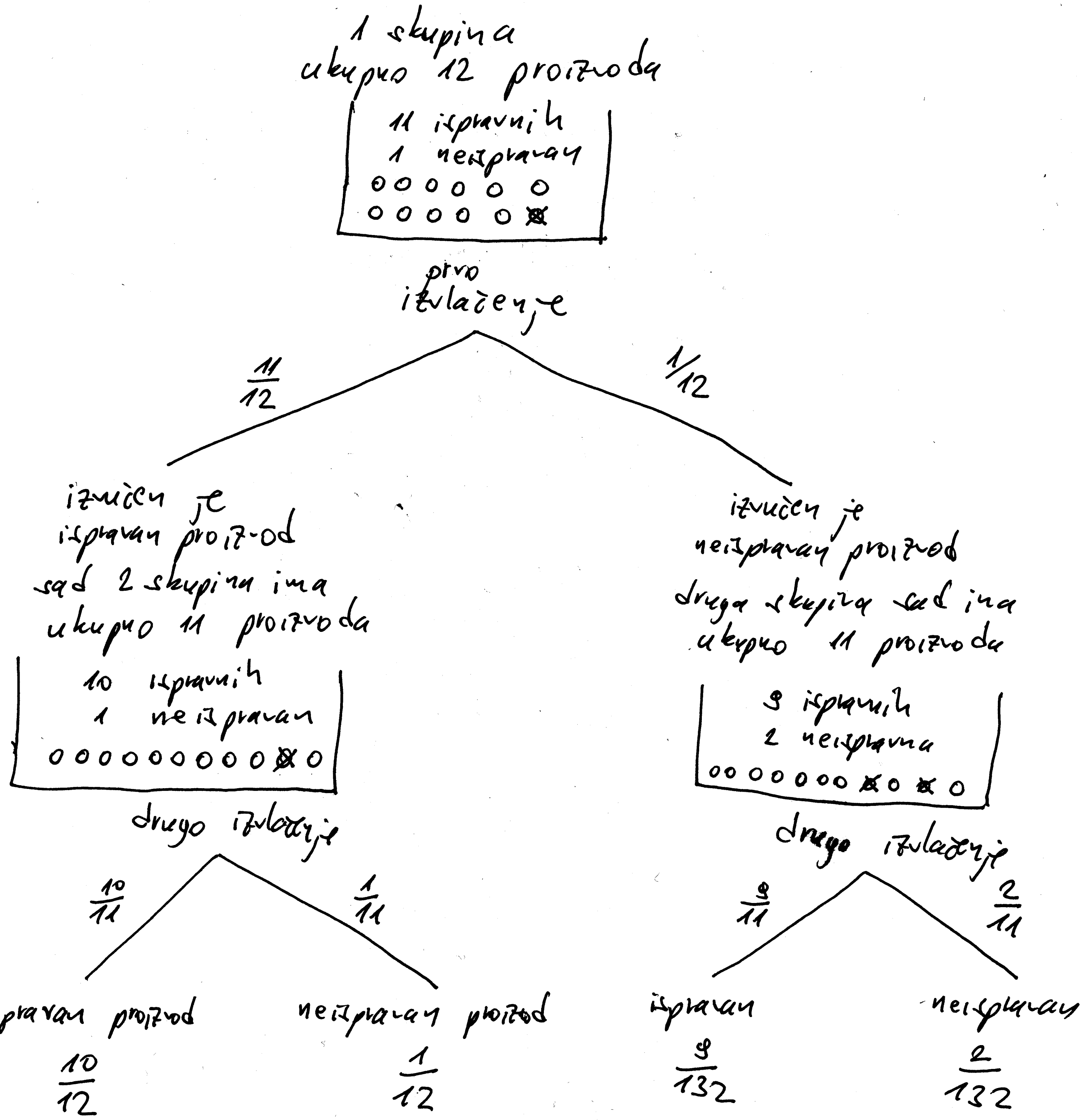
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},\ s>0;\quad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\ s>\alpha;$

i $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)+\beta^2},\ s>\alpha$. Prema tome

$$y = 3 + e^t\cos 2t + \frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

(#) Date su dvije skupine proizvoda. Jedna od njih sadrži 12, a druga 10 komada, pri čemu se u obje skupine nalazi po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve skupine i prebačen u drugu, a poslije toga slučajnim odabirom uzima se jedan proizvod iz druge skupine. Odrediti vjerovatnoću da je taj proizvod neispravan.

Rj. I način



Prostor uzoraka je $S = \{(is, is), (is, ne), (ne, is), (ne, ne)\}$

$$P(\{(is, ne), (ne, ne)\}) = \frac{1}{12} + \frac{2}{132} = \frac{13}{132} = 0{,}0985$$

Vjerovatnoća da je slučajno odabrani proizvod iz druge skupine neispravan je 9,85%

<u>II način</u>

Neka je:

A_1 događaj da je prvi izvučeni proizvod neispravan

B_1 događaj da je prvi izvučeni proizvod ispravan

A_2 događaj da je drugi izvučeni proizvod neispravan

B_2 događaj da je drugi izvučeni proizvod ispravan

C događaj da je nakon oba izvlačenja slučajno odabrani proizvod iz druge skupine neispravan

Primjetimo $P(C) = P(A_2A_1) + P(A_2B_1)$

$$p(A_2A_1) = p(A_1)\,p(A_2|A_1) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{132}$$

$$p(A_2B_1) = p(B_1)\,p(A_2|A_1) = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{12}$$

$$P(C) = \frac{2}{132} + \frac{1}{12} = \frac{13}{132} = 0{,}0985$$

tražena vjerovatnoća

(#) Na putu kretanja automobila nalazi se 5 semafora. Vjerovatnoća da će se auto zaustaviti na prvom semaforu je 0,4; na drugom 0,6; na trećem 0,5; na četvrtom 0,7 i na petom semaforu 0,4. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Neka je X slučajna promjenjiva koja predstavlja broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenjive X i zatim odrediti njenu f-ju raspodjele $F(x)$, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperziju $\sigma^2(X)$.

Rj.

Označimo sa Z_i događaj da je vozač zaustavio automobil na i-tom semaforu $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Kako se na putu kretanja automobila nalazi pet semafora imamo da je $R_X = \{0,1,2,3,4,5\}$ (R_X je skup vrijednosti slučajne promjenjive X).

$P\{X=0\} = P(Z_1) = P\{\text{crveno}\} = 0,4$

$P\{X=1\} = P(\overline{Z}_1 Z_2) = P\{(\text{zeleno, crveno})\} = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$

$P\{X=2\} = P(\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 Z_3) = P\{(\text{zeleno, zeleno, crveno})\} = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,12$

$P\{X=3\} = P(\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 Z_4) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,084$

$P\{X=4\} = P(\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 \overline{Z}_4 Z_5) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,0144$

$P\{X=5\} = P(\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 \overline{Z}_4 \overline{Z}_5) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,0216$

Primjetimo da je

$$0,4 + 0,36 + 0,12 + 0,084 + 0,0144 + 0,0216 = 1.$$

Zakon raspodjele slučajne promjenjive X je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}4 & 0{,}36 & 0{,}12 & 0{,}084 & 0{,}144 & 0{,}0216 \end{pmatrix}$$

ili tabelarno

k	0	1	2	3	4	5
$P\{X=k\}$	0,4	0,36	0,12	0,084	0,0144	0,0216

Funkcija raspodjele je

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x<0 \\ 0{,}4; & 0 \le x < 1 \\ 0{,}76; & 1 \le x < 2 \\ 0{,}88; & 2 \le x < 3 \\ 0{,}964; & 3 \le x < 4 \\ 0{,}9784; & 4 \le x < 5 \\ 1; & 5 \le x \end{cases}$$

Prisjetimo se

Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne promjenjive X je broj definisan sa

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i\, p(x_i), & X \text{ diskretna slučajna promjenjiva} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi_X(x)\, dx, & X \text{ neprekidna slučajna promjenjiva} \end{cases}$$

pod uslovom da odgovarajući red, odnosno integral apsolutno konvergira.

$$E(X) = 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}36 + 2\cdot 0{,}12 + 3\cdot 0{,}084 + 4\cdot 0{,}0144 + 5\cdot 0{,}0216$$
$$= 1{,}0176$$

Matematičko očekivanje iznosi 1,0176.

Prisjetimo se

Disperzija $\sigma^2(X)$ slučajne promjenjive X je definisana sa

$$\sigma^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 0^2\cdot 0{,}4 + 1^2\cdot 0{,}36 + 2^2\cdot 0{,}12 + 3^2\cdot 0{,}084 + 4^2\cdot 0{,}0144 + 5^2\cdot 0{,}0216$$
$$= 2{,}3664$$

$$\sigma^2(X) = 2{,}3664 - 1{,}0176^2 = 1{,}3309$$

tražena disperzija